УДК 535.41+654.91

СТАТИСТИКА ФОТООТСЧЕТОВ ГАУССОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ, СО СТАТИСТИЧЕСКИ СВЯЗАННЫМИ МОДАМИ ПОЛЯРИЗАЦИИ

А.С. Мазманишвили

Сумской государственный университет,
г. Сумы, Украина, e-mail: mazmanishvili@gmail.com

Аннотация. Вычислена характеристическая функция распределения вероятностей фотоотсчетов квантового неполяризованного гауссового оптического излучения со статистически связанными модами поляризации, который описывается нормальным гауссовским процессом.

Ключевые слова: квантовое оптическое излучение, процесс Орнштейна-Уленбека, моды поляризации.

1. Постановка задачи. Излучение оптических лазеров часто моделируется узкополосным гауссовским процессом [1, 2]. При возбуждении таким излучением одномодового световода (СВ) с круговым поперечным сечением и осесимметричным распределением показателя преломления в нем распространяются в направлении оси две фундаментальные моды HE_{11}, электрические поля которых ортогонально поляризованы вдоль главных осей x и y ($HE_{11}^x - HE_{11}^y$ моды). Если при введении в одномодовый СВ начальное состояние излучения обладало свойствами линейно-поляризованного излучения, то это свойство не сохраняется уже на достаточно коротких расстояниях и, таким образом, излучение оптического лазера становится эллиптически поляризованным.

Появление двух мод с ортогональными поляризациями обусловлено наличием нерегулярностей в волокне (тепловых, акустических и механических возмущений вдоль волокна, изгибов, технологических дефектов и прочее) [2]. При этом даже весьма малые возмущения значимо «связывают» моды, способствуя перекачке энергии из одной компоненты поляризации в другую. Очевидно, что статистическая связь между поляризационными модами определяется погонной плотностью перечисленных возмущений (нерегулярностей).

При наблюдении оптического излучения на выходе одномодового СВ с помощью фотодетектора регистрируются отсчеты, т.е. электрические импульсы на временном интервале наблюдения [1, 3, 4].

Представляет интерес нахождение статистики фотоотсчетов выходного излучения с учетом статистической связи поляризационными компонентами, обусловленными нерегулярностями вдоль СВ. Если располагать функцией корреляции между поляризационными компонентами излучения, связанной с плотностью нерегулярностей в волокне, то по статистике фотоотсчетов можно найти количественные характеристики таких нерегулярностей вдоль СВ и, следовательно, выработать требования к качеству выпускаемых оптических кабелей и установить допуски на их параметры при прокладке.

2. Статистически независимые моды поляризации. Известное решение [4, 5] задачи о статистике фотоотсчетов неполяризованного гауссового излучения получено для случая, когда обе компоненты поляризации статистически независимы. Рассмотрим случай произвольной статистической связи между поляризационными компонентами в предположении, что статистическая связь между ними определяется воздействием неоднородностей СВ.

Пусть $\alpha_n(t)$ – комплексная амплитуда [5,6] компонентов ($n = 1,\ 2$) поляризации излучения. В рамках модели гауссовского излучения с лоренцевским контуром линии с шириной ν примем, что каждый из компонентов является нормальным марковским процессом [2, 7], при этом корреляционная матрица интенсивностей $S = \langle \alpha(t) \otimes \alpha^*(t) \rangle$ равна

$$S \;=\; \begin{pmatrix} \sigma_1 & \rho^* \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \\ \rho \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} & \sigma_2 \end{pmatrix}\,, \tag{1}$$

где $\sigma_n = \langle |\alpha_n(t)|^2 \rangle$ – интенсивности поляризационных компонент, ρ – коэффициент корреляции ($0 \leqslant |\rho| \leqslant 1$) между компонентами поляризации, $\langle\,.\,\rangle$ – знак нахождения математического ожидания.

Для одномодового (однокомпонентного) гауссовского излучения с интенсивностью σ_1 известно выражение, описывающее производящую функцию (ПФ) числа фотоотсчетов

$$Q_1(\lambda, \sigma_1) \;=\; \langle \exp{(-\lambda \Omega_1)} \rangle\,, \tag{2}$$

где λ – производящий параметр, Ω_1 – энергия оптического поля, запасенная в компоненте поляризации с ортом $\vec{e}_1$,

$$\Omega_1 \;=\; \int\limits_0^T dt\, |\vec{e}_1 \alpha_1(t)|^2\,. \tag{3}$$

Произвоящая функция $Q_1(\lambda, \sigma_1)$ для гауссовского излучения с лоренцевским контуром линии с шириной ν имеет следующий вид [3, 5, 6]

$$Q_1(\lambda, \sigma_1) \;=\; \frac{4\nu r_1 \exp{(\nu T)}}{(r_1 + \nu)^2 \exp{(r_1 T)} - (r_1 - \nu)^2 \exp{(-r_1 T)}}\,. \tag{4}$$

При этом $r_1 = \sqrt{\nu^2 + 2\lambda\nu\sigma_1}$ и T – длительность интервала наблюдения.

Выражение для другой компоненты имеет аналогичный вид

$$Q_2(\lambda, \sigma_2) \;=\; \langle \exp{(-\lambda \Omega_2)} \rangle \;=\; \frac{4\nu r_2 \exp(\nu T)}{(r_2 + \nu)^2 \exp{(r_2 T)} - (r_2 - \nu)^2 \exp{(-r_2 T)}}\,, \tag{5}$$

где $\Omega_2 = \int\limits_0^T dt\, |\vec{e}_2 \alpha_2(t)|^2$ с ортом $\vec{e}_2$, $r_2 = \sqrt{\nu^2 + 2\lambda\nu\sigma_2}$.

С помощью ПФ $Q_1(\lambda, \sigma_1)$ и $Q_2(\lambda, \sigma_2)$ можно извлечь информацию о распределении амплитуд вероятностей $\{P(m)\}$ регистрации m фотоотсчетов одной (первой) из компонент

$$P_1(m) \;=\; \left\langle \frac{\Omega_1^m}{m!} \exp(-\Omega_1) \right\rangle \tag{6}$$

и аналогично для второй моды поляризации.

Распределение амплитуд вероятностей (6) является взвешенным распределением Пуассона, оно может быть получено из ПФ $Q_1(\lambda, \sigma_1)$ с помощью многократного дифференцирования

$$P_1(m) \;=\; \frac{(-1)^m}{m!} \frac{d^m}{d\lambda^m} Q_1(\lambda, \sigma_1) \bigg|_{\lambda=1}\,. \tag{7}$$

С целью избежать нахождения производных высоких порядков можно воспользоваться интегральным представлением Коши для аналитических функций

$$f(z) \; = \; \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi \tag{8}$$

с контуром интегрирования, охватывающим точку z.

Из (8) вытекает удобная для численных расчетов формула, описывающая статистику фотоотсчетов поляризационной компоненты одномодового излучения

$$P_1(m) \; = \; \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\pi}^{\pi} Q_1\left(1 + e^{i\varphi}, \sigma_1\right) d\varphi \,, \tag{9}$$

которая следует из (8) с помощью замены $\xi = \exp(i\varphi)$. Аналогичную формула получается и для $P_2(m)$.

3. Произвольная статистическая связь между модами поляризации. Для описания двухкомпонентного оптического излучения воспользуемся матричным аналогом интегральной формулы Коши. Тогда производящая функция $Q_{12}(\lambda)$ отсчетов неполяризованного излучения может быть записана в виде

$$Q_{12}(\lambda) \; = \; \det\left(\frac{1}{2\pi i}\oint ds(s - S)^{-1} Q\left(\lambda, s\right)\right) \tag{10}$$

с $2{\times}2$-матрицей Стокса излучения. В этом выражении контур интегрирования в s-плоскости должен охватывать полюса резольвенты $(s - S)^{-1}$. Пользуясь известными методами [7], рассмотрим (10) в представлении, в котором матрица Стокса (1) диагональна, т.е.

$$S \Rightarrow S_{\mathrm{diag}} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

с собственными числами матрицы S

$$s_{1,2} \; = \; \frac{1}{2}\left((\sigma_1 + \sigma_2) \pm \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 4|\rho|^2\sigma_1\sigma_2}\right). \tag{12}$$

При наличии статистической связи между модами поляризации $|\rho| \neq 0$ собственные числа s_1 и s_2 будут определять формирование статистики фотоотсчетов.

Вычисляя, с учетом (11), матричные элементы в формуле (10) найдем, что

$$Q_{12}(\lambda) \; = \; \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi i}\oint ds(s - s_1)^{-1} Q_1\left(\lambda, s\right) & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2\pi i}\oint ds(s - s_2)^{-1} Q_2\left(\lambda, s\right) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Тогда получим окончательно для искомой производящей функции

$$Q_{12}(\lambda) \; = \; Q_1(\lambda, s_1)\, Q_2(\lambda, s_2)\,. \tag{14}$$

Выражение (14) описывает статистику фотоотсчетов неполяризованного излучения в случае наличия статистической связи между модами поляризации. Из него вытекает, что в случае отсутствия статистической связи, когда $|\rho| = 0$ и $s_1 = \sigma_1$, $s_2 = \sigma_2$, ПФ $Q_{12}(\lambda)$ есть простое произведение парциальных ПФ

$$Q_{12}(\lambda) \;=\; Q_1(\lambda, \sigma_1)\, Q_2(\lambda, \sigma_2) \;= \tag{15}$$
$$= \frac{4\nu r_1 \exp(\nu T)}{(r_1+\nu)^2 e^{r_1 T} - (r_1-\nu)^2 e^{-r_1 T}} \cdot \frac{4\nu r_1 \exp(\nu T)}{(r_2+\nu)^2 e^{r_2 T} - (r_2-\nu)^2 e^{-r_2 T}}\,,$$

отвечающих каждой из мод поляризации. При этом распределение $P_{12}(m)$ представляет собой свертку парциальных распределений $P_1(m)$ и $P_2(m)$ со средними $\langle m\rangle_1 = \sigma_1 T$ и $\langle m\rangle_2 = \sigma_2 T$ соответственно, вычисляемых согласно (4), (5) и (10). В другом предельном случае полной статистической связи, когда $|\rho| = 1$, статистика фотоотсчетов эффективно отвечает одной регистрируемой поляризационной моде с суммарной интенсивностью $s_1 = \sigma_1 + \sigma_2$. При этом $s_2 = 0$, что дает $Q_2(\lambda, \sigma_2) = 1$ и $P_2(m=0) = 1$, т.е. во второй поляризационной компоненте с вероятностью, равной единице, имеет место только «отсчет» $m = 0$.

4. Анализ распределения вероятностей. В общем случае частичной статистической связи между модами поляризации, когда $0 \leqslant |\rho| \leqslant 1$, ПФ $Q_{12}(\lambda)$ есть произведение ПФ $Q_1(\lambda, \sigma_1)$ и $Q_2(\lambda, \sigma_2)$, отвечающих каждой из мод поляризации, но с эффективными интенсивностями s_1 и s_2, определяемыми согласно (12).

Распределение амплитуд вероятностей $P_{12}(m)$ является взвешенным распределением Пуассона, оно может быть получено из ПФ $Q_{12}(\lambda)$:

$$P_{12}(m) \;=\; \frac{(-1)^m}{m!}\, \frac{d^m}{d\lambda^m}\, Q_{12}(\lambda)\bigg|_{\lambda=1}\,. \tag{16}$$

При этом распределение $P_{12}(m)$ фотоотсчетов является сверткой парциальных распределений $P_1(m)$ и $P_2(m)$ со средними $\langle m\rangle_1 = s_1 T$ и $\langle m\rangle_2 = s_2 T$ соответственно

$$P_{12}(m) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} P_1(n) P_2(m-n)\,, \qquad m = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, \tag{17}$$

которые в случае $|\rho| \neq 0$ отличаются от распределений амплитуд вероятностей $P_1(m)$ и $P_2(m)$ со средними $\langle m\rangle_1 = \sigma_1 T$ и $\langle m\rangle_2 = \sigma_2 T$.

Первый момент распределения $P_{12}(m)$ определяется формулой $\langle m\rangle_{12} = (\sigma_1 + \sigma_2)T$. Для дисперсии Δ_{12} распределения числа фотоотсчетов найдем, следуя (15),

$$\Delta_{12} = \langle m^2\rangle_{12} - \langle m\rangle_{12}^2 = \langle m\rangle_{12} + \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2|\rho|^2\right) \frac{2\nu T - 1 + e^{-2\nu T}}{4\nu^2}\,. \tag{18}$$

Поскольку при $\rho = 0$ имеем

$$\Delta_{12} \;=\; \Delta_1 + \Delta_2 \;=\; \sigma_1 T + \sigma_1^2\, \frac{2\nu T - 1 + e^{-2\nu T}}{4\nu^2} + \sigma_2 T + \sigma_2^2\, \frac{2\nu T - 1 + e^{-2\nu T}}{4\nu^2}\,, \tag{19}$$

и дисперсия Δ_{12} (19) есть сумма парциальных дисперсий Δ_1 и Δ_2, то в дисперсии Δ_{12} (18) содержится слагаемое $\sigma_1\sigma_2|\rho|^2(2\nu T - 1 + e^{-2\nu T})/2\nu^2$, являющееся дополнительным и отвечающее статистической связи между модами поляризации. Статистическая связь между модами приводит к уширению в целом распределения амплитуд $P_{12}(m)$ при неизменном его первом моменте.

Литература

1. Шереметьев А.Г. Статистическая теория лазерной связи / М.: Связь, 1974.
2. Шереметьев А.Г. Волоконный оптический гироскоп / М.: Радио и связь, 1987.
3. Мазманишвили А.С. Континуальное интегрирование как метод решения физических задач / К.: Наукова думка, 1987.
4. Перина Я. Когерентность света / М.: Мир, 1974.
5. Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления / М.: Мир, 1974.
6. Глаубер Р. Оптическая когерентность и статистика отсчетов // в сб. «Квантовая оптика и квантовая радиофизика» / М.: Мир, 1974.
7. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления / М.: Наука, 1984.

PHOTOCOUNTS STATISTICS OF NONPOLARIZED GAUSSIAN OPTICAL RADIATION

A.S. Mazmanishvili

Sumy State University,
Sumy, Ukraine, e-mail: mazmanishvili@gmail.com

Abstract. Photocounts statistics of nonpolarized Gaussian optical radiation is analytically found in the case when statistical connection between polarization modes exists.

Key words: quantum optical radiation, Ornstein-Uhlenbeck's process, polarization modes.